Varierende rente

a. Det generelle tilfellet

Alle slutt- og nåverdiformler i boken forutsetter at kapitalkostnaden er den samme i alle fremtidige perioder. Dette ser du f.eks. direkte fra (3.8), hvor r er konstant over tid:

$$NV = \frac{X}{(1+r)} + \frac{X}{(1+r)^2} + \frac{X}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{X}{(1+r)^T} \tag{3.8}$$

Dette uttrykket for nåverdien av en etterskuddsannuitet forenklet vi i sin tur til (3.10) på følgende måte:

$$NV = X \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^T} \right] \tag{3.10}$$

Hvis r varierer over tid, slik som i lærebokens figur 3.8, kan vi ikke lenger beregne nåverdien på riktig måte ved hjelp av uttrykk som forutsetter konstant rente. Uttrykk som (3.8) og (3.10) kan derfor ikke brukes. La oss kalle renten i periode t for *perioderenten* r_t. I løpet av en T-periodisk kontantstrøm vil vi da stå overfor inntil T ulike renter, hvor f.eks. r_T skal brukes til å diskontere fra tidspunkt T til tidspunkt $T-1$. Tilsvarende diskonterer r_3 fra tidspunkt 3 til tidspunkt 2.

Når vi skal beregne nåverdien av et fremtidig beløp X_t, må vi først diskontere det tilbake fra t til $t-1$ med rente r_t. Deretter diskonteres dette beløpet tilbake til $t-2$ med renten r_{t-2}, så til $t-3$ med renten r_{t-3}, etc. Siste skritt blir derfor å diskontere nåverdien av X_t på tidspunkt 1 tilbake til tidspunkt null ved hjelp av renten r_1. Tilsvarende gjøres for alle de andre elementene i kontantstrømmen. Nåverdiuttrykket blir derfor:

$$\begin{aligned} NV = X_0 &+ \frac{X_1}{(1+r_1)} + \frac{X_2}{(1+r_1)\cdot(1+r_2)} + \frac{X_3}{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)} + \ldots \\ &+ \frac{X_{T-1}}{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot\ldots\cdot(1+r_{T-1})} + \frac{X_T}{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot\ldots\cdot(1+r_T)} \end{aligned} \tag{3.8a}$$

Denne formelen er brukt i lærebokens eksempel 3.18.

b. Geometrisk gjennomsnitt

I (3.8a) har hver diskonteringsfaktor et multiplikativt ledd i nevneren, der renten r_t gjelder for diskontering kun fra tidspunkt t til $t-1$. Den gjelder altså ikke fra t helt tilbake til tidspunkt null. Selv med slik varierende rente over tid er det imidlertid fortsatt mulig å bruke en nåverdiformel som ikke har denne multiplikative formen, men som ligner den du er vant til fra (3.8). Poenget er at selv om de én-periodiske rentene r_t varierer over tid, finnes det like fullt en gjennomsnittsrente rg_t som gjør det mulig å beregne nåverdi på lignende måte som i (3.8). Ved hjelp av denne gjennomsnittsrenten kan du altså diskontere direkte fra tidspunkt t til tidspunkt null gjennom en diskonteringsfaktor hvor nevneren er $(1+ rg_t)^t$:

$$NV = X_0 + \frac{X_1}{(1+rg_1)} + \frac{X_2}{(1+rg_2)^2} + \frac{X_3}{(1+rg_3)^3} + \ldots + \frac{X_{T-1}}{(1+rg_{T-1})^{T-1}} + \frac{X_T}{(1+rg_T)^T} \tag{3.8b}$$

Sammenlign nå (3.8a) og (3.8b). Da ser du at nåverdien av prosjektet vil være den samme ved begge metoder hvis hvert ledd i nåverdiberegningen gir samme verdi ved begge metoder. Betingelsen er altså at for alle t må vi ha:

$$\frac{X_t}{(1+rg_t)^t} = \frac{X_t}{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)\cdot\ldots\cdot(1+r_{t-1})\cdot(1+r_t)}$$

Kontantstrømselementet X_t kan forkortes på begge sider av likhetstegnet. Dermed blir betingelsen at de to diskonteringsfaktorene må være like, dvs:

$$\frac{1}{(1+rg_t)^t} = \frac{1}{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)\cdot\ldots\cdot(1+r_{t-1})\cdot(1+r_t)}$$

Løs så dette uttrykket for gjennomsnittsrenten rg_t ved å ta t'te rot på hver side. Da blir betingelsen:

(3.8c) $$rg_t = \sqrt[t]{(1+r_1)\cdot(1+r_2)\cdot(1+r_3)\cdot\ldots\cdot(1+r_{t-1})\cdot(1+r_t)} - 1$$

I ord betyr dette at de to metodene gir samme nåverdi ved varierende rente dersom gjennomsnittsrenten rg_t er et geometrisk gjennomsnitt av alle perioderentene til og med tidspunkt t.

EKSEMPEL 3.18A

I lærebokens eksempel 3.18 er kontantstrømmen (–100, 30, 70, 80, 20). Perioderentene var (10 %, 5 %, 2 %, 7 %), og nåverdien beregnet med metode (3.8a) var 72. La oss nå sjekke at metode (3.8b) gir samme svar så lenge vi passer på at perioderenter og gjennomsnittsrenter forholder seg til hverandre i henhold til (3.8c). Ifølge denne betingelsen må gjennomsnittsrentene i de fire årene være:

$$\begin{aligned} rg_1 &= r_1 \\ &= 10\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rg_2 &= \sqrt{1{,}10\cdot 1{,}05} - 1 \\ &= 7{,}5\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rg_3 &= \sqrt[3]{1{,}10\cdot 1{,}05\cdot 1{,}02} - 1 \\ &= 5{,}6\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rg_4 &= \sqrt[4]{1{,}10\cdot 1{,}05\cdot 1{,}02\cdot 1{,}07} - 1 \\ &= 6{,}0\% \end{aligned}$$

Brukes nå disse gjennomsnittsrentene i (3.8b), får vi:

$$\begin{aligned} NV &= -100 + \frac{30}{1{,}1} + \frac{70}{1{,}075^2} + \frac{80}{1{,}056^3} + \frac{20}{1{,}06^4} \\ &= 72 \end{aligned}$$

Dette er samme nåverdi som i læreboken, som bruker metode (3.8a).

c. Aritmetisk gjennomsnitt

Å beregne geometrisk gjennomsnitt i (3.8c) er en forholdsvis komplisert operasjon, i alle fall når det gjøres med kalkulator. Spørsmålet er derfor om det finnes en enklere måte å beregne gjennomsnittsrenter på og som gir omtrent samme resultat som de geometrisk beregnede. Det mest nærliggende alternativet er aritmetisk gjennomsnitt rg_t^a, som rett og slett er summen av perioderentene dividert med antall perioder:

(3.8d) $$rg_t^a = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_t}{t}$$

d. Aritmetisk kontra geometrisk gjennomsnitt

I de aller fleste finansprosjekter vil det være temmelig ubetydelige avvik mellom de gjennomsnittsrenter en får ved aritmetisk, kontra ved geometrisk gjennomsnittsberegning. Den aritmetiske gjennomsnittsrenten vil riktignok alltid ligge høyere enn den geometriske. Forskjellen mellom dem er dessuten større jo mer perioderentene varierer over tid. Likevel dreier dette seg om et avvik som typisk er mindre enn én promille. Derfor vil også nåverdiforskjeller som oppstår på grunn av denne renteforskjellen, ligge godt innenfor den feilmarginen du må regne med når fremtidige kapitalkostnader skal fastlegges. Siden de aritmetiske gjennomsnittene er noe høyere enn de korrekte geometriske, betyr altså dette at ved bruk av aritmetisk gjennomsnitt vil nåverdien av et investeringsprosjekt bli noe lavere enn den korrekte. Igjen er det imidlertid snakk om ubetydeligheter.

EKSEMPEL 3.18B

I eksempel 3.18A er gjennomsnittsrentene beregnet som geometriske gjennomsnitt. Vi beregner nå aritmetiske gjennomsnitt fra (3.8d) og angir begge typer rentegjennomsnitt samt nåverdiene med tre desimaler. Da bør du selv kontrollere at vi får følgende resultat:

	1	2	3	4	Nåverdi
Geometrisk gjennomsnitt, %	10,000	7,471	5,615	5,960	71,552
Aritmetisk gjennomsnitt, %	10,000	7,500	5,667	6,000	71,495
Avvik, prosentpoeng	0	0,029	0,052	0,040	

Her ser du at selv om aritmetisk gjennomsnittsberegning gir litt for høye renter og litt for lav nåverdi, er feilmarginen på renten mindre enn seks hundredels prosentpoeng i alle periodene. Den tilsvarende undervurderingen av nåverdien er mindre enn én promille.