Kontinuerlig rente

Kontinuerlig forrentning skjer hvis rente belastes et lån eller godskrives en sparekonto ikke bare hver måned eller hver dag, men bokstavelig talt hvert øyeblikk.

EKSEMPEL 3.50

Nettbanken Link er under oppstarting. Ledelsen har så langt tatt utgangspunkt i sparevilkår fra sammenlignbare norske banker, som tilbyr 5 % årlig sparerente tillagt ved årets slutt. Det er imidlertid hard konkurranse om innskudd, og banken ønsker å markedsføre seg som aggressiv, moderne og innovativ. Ledelsen ber derfor om å få belyst hva som skjer med den årsrenten banken egentlig betaler dersom renten tillegges sparesaldo mer enn én gang pr. år. Idéen er å tilby et system der renten tillegges n ganger pr. år, og hvor kontoen hver gang godskrives med en rente lik andre bankers årsrente dividert på n.

Tabell 3.60 viser hva som skjer ved de ulike alternativene. Begrepet «effektiv rente» presenteres først i kapittel 4. Her i kapittel 3 holder det å tenke på effektiv rente som den årsrenten banken egentlig betaler, gitt at den tilbyr en korttidsrentesats lik renten ved årlig rentepåføring dividert med antall terminer.

TABELL 3.60: Effektiv årsrente som funksjon av antall årlige rentepåføringer.
Terminrentesatsen er 5 % dividert med antall terminer pr. år.

Renteberegnings-hyppighet	Antall terminer pr. år	Termin-rentesats (%)	Effektiv årsrente (%)
Årlig	1	5/1	5,0000
Månedlig	12	5/12	5,1162
Daglig	365	5/365	5,1268
Hvert minutt	525 600	5/525 600	5,1271

I tabell 3.60 er terminrentesatsen lik årsrenten på 5 % dividert med antall rentepåføringer (terminer) pr. år. Effektiv årsrente er beregnet fra (3.22). Her ser du nøyaktig samme effekt som i del 3.4.4: Jo flere rentepåføringer pr. år, desto høyere blir effektiv årsrente. I dette tilfellet stiger den fra 5 % ved årlig renteberegning til ca. 5,13 % når renten påføres hvert minutt. I dette siste tilfellet er altså minuttrentesatsen 5/525 600, dvs. ca. en tusendels prosent pr. minutt.

Hva hvis renten påføres *kontinuerlig*? Dette er det samme som å spørre om hva som skjer med effektiv årsrente r_{eff} når antall renteterminer n går mot uendelig. Vi skal altså finne grensen for uttrykket :

(3.70) $$r_{eff} = \lim_{n \to \infty} (1+\frac{r}{n})^n - 1$$

hvor r er nominell årsrente. Oppgaven er å vise at grensen i dette uttrykket er:

(3.71) $$r_{eff} = e^r - 1$$

Her er e grunntallet i det naturlige logaritmesystemet (dvs. tallet 2,71828…). Dette grunntallet e kan formelt defineres slik:

(3.72) $$e = \lim_{n \to \infty} (1+\frac{1}{n})^n$$

Deretter kan vi omskrive $(1+\frac{r}{n})^n$ i (3.72) til:

(3.73) $$(1+\frac{r}{n})^n = \left[(1+\frac{1}{\frac{n}{r}})^{\frac{n}{r}} \right]^r$$

På høyresiden av likhetstegnet har vi først dividert med r over og under brøkstreken i den innerste parentesen. Deretter har vi opphøyet denne parentesen i n/r og så opphøyet denne parentesen igjen i r (husk at $(a^b)^c = a^{bc}$) .

La oss nå skrive høyresiden av (3.73) som:

(3.74) $$\left[(1+\frac{1}{m})^m \right]^r$$

Her har vi altså bare erstattet brøken n/r i (3.73) med variabelen m. Dette innebærer at når n (antall rentepåføringer) går mot uendelig, går også m mot uendelig. Uttrykket i hakeparentesen i (3.74) er altså av samme type som på høyresiden av (3.72). Grensen er derfor:

$$\lim_{n \to \infty} (1+\frac{1}{m})^m = e$$

Dermed har vi vist at uttrykket i hakeparentesen i (3.73) går mot *e* når *n* går mot uendelig. Dette betyr at hele uttrykket på høyresiden går mot e^r:

$$\lim_{n \to \infty} (1+\frac{r}{n})^n - 1 = e^r - 1$$

Ved kontinuerlig forrentning er altså effektiv rente gitt ved (3.71), som vi gjentar:

(3.71) $r_{eff} = e^r - 1$

Her er *e* grunntallet i det naturlige logaritmesystem (dvs. $e = 2{,}7182818\ldots$, som ligger i de fleste kalkulatorer). I eksempel 3.50 er r = 5 %. Da vil kontinuerlig forrentning bety at effektiv sparerente er $e^{0,05} - 1$, dvs. 5,1271 %. Tabell 3.60 viser at allerede med månedlige rentepåføringer er effektiv årsrente 5,1162 %. Overgangen fra månedlig til kontinuerlig forrentning øker derfor bare effektiv årsrente med 0,011 prosentpoeng. Merk for øvrig at i alle fall opp til fjerde desimal er den kontinuerlig påførte renten identisk med den minuttpåførte.

Fra dette kan vi nå konstruere både *sluttverdifaktor og nåverdifaktor* basert på kontinuerlig rente over *T* perioder. Hvis den kontinuerlige renten er *rk*, vil sluttverdi av 1 krone etter *T* perioder være:

(3.75) $RK^{\rightarrow}_{rk;T} = e^{rk \cdot T}$

Tilsvarende er den kontinuerlige diskonteringsfaktoren (nåverdifaktoren) gitt ved:

(3.76) $RK^{\leftarrow}_{rk;T} = \dfrac{1}{e^{rk \cdot T}}$

Talleksemplene viser at overgangen til kontinuerlig forrentning spiller ubetydelig rolle hvis utgangspunktet er månedlig forrentning. Den praktiske nytten av kontinuerlig forrentning er da heller ikke primært knyttet til praktisk renteregning. Det er først og fremst et redskap i mer teknisk avansert finans, spesielt innenfor såkalte opsjonsprismodeller.

Oppgave

a Finn nåverdien av å motta 100 000 kroner om fem år, forutsatt alternativt årlig og kontinuerlig forrentning til 8 %.

b Hvilken kontinuerlig rente gir samme nåverdi som ved årlig diskontering i spørsmål a?

Løsningsforslag

a Ved årlig forrentning:

$$\begin{aligned} NV &= 100\,000 \cdot R^{\leftarrow}_{8;5} \\ &= 68\,058 \end{aligned}$$

Ved kontinuerlig forrentning:

$$\begin{aligned} NV &= 100\,000 \cdot e^{-0,08 \cdot 5} \\ &= 67\,032 \end{aligned}$$

Som ventet blir nåverdien lavest ved diskontering med kontinuerlig rente. Dette er speilbildet av det vi finner ved sluttverdiberegning. Da blir sluttverdien av et gitt beløp alltid størst ved kontinuerlig forrentning så lenge det brukes samme rentesats i de to nåverdiberegningene.

b Uttrykk (3.76) gir verktøyet du trenger for å besvare dette spørsmålet. Den kontinuerlige renten *rk* som gir nåverdi på 68 058 (dvs. samme nåverdi som ved 8 % årlig forrentning), er gitt ved betingelsen:

$$\begin{aligned} 100\,000 \cdot e^{-rk \cdot 5} &= 68\,058, \text{ dvs.} \\ e^{-rk \cdot 5} &= 0{,}68058 \end{aligned}$$

Hvis du ikke ønsker å bruke prøving og feiling, kan svaret finnes ved å ta naturlig logaritme (ln) på begge sider av likhetstegnet:

$$\begin{aligned} -rk \cdot 5 &= \ln(0{,}68058) \\ -rk &= \ln(0{,}68058)/5 \\ -rk &= -0{,}07696 \\ rk &\approx 7{,}7\ \% \end{aligned}$$

Årlig forrentning til 8 % gir altså samme nåverdi som kontinuerlig forrentning til ca. 7,7 % i dette tilfellet.