Sluttverdi ved kontinuerlig forretning

Utgangspunktet er spørsmålet om hva som skjer med effektiv årsrente r_{eff} når antall renteterminer n går mot uendelig. Vi skal altså finne grensen for uttrykket:

(3.27) $$r_{eff} = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1$$

lim $n \to \infty$

hvor r er nominell årsrente. Oppgaven er å vise at læreboken har rett i påstanden om at grensen i (3.27) er:

(3.28) $$r_{eff} = e^r - 1$$

Her er e grunntallet i det naturlige logaritmesystemet (dvs. tallet 2,71828…). Dette grunntallet e kan formelt defineres slik:

(3.28a) $$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

lim $n \to \infty$

Deretter kan vi omskrive $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ i (3.27) til:

(3.28b) $$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^r$$

På høyresiden av likhetstegnet har vi først dividert med r over og under brøkstreken i den innerste parentesen. Deretter har vi opphevet denne parentesen i n/r og så opphevet denne parentsen igjen i r (husk at $(a^b)^c = a^{bc}$).

La oss nå skrive høyresiden av (3.28b) som:

(3.28c) $$\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^r$$

Her har vi altså bare erstattet brøken n/r i (3.28b) med variabelen m. Dette innebærer at når n (antall rentepåføringer) går mot uendelig, går også m mot uendelig. Uttrykket i hakeparentesen i (3.28c) er altså av samme type som på høyresiden av (3.28a). Grensen er derfor:

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$$

lim $n \to \infty$

Dermed har vi vist at uttrykket i hakeparentesen i (3.28b) går mot e når n går mot uendelig. Dermed går hele uttryket på høyresiden mot e^r:

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1 = e^r - 1$$

$$\lim n \to \infty$$